EXERCICE 23

Parmi les applications suivantes lesquelles sont linéaires ? Si oui, déterminer l'image, le noyau pour les applications $f_i, i = 1, \cdots, 6$ et dire si l'application est un isomorphisme. ($\mathbb{R}_6[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 6 et $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continument dérivables)

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_1(x, y) = x + 2y$
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f_2(x, y) = (x + 2y, 3x, y)$
3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f_3(x, y, z) = (z, z - x)$
4. $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_4(x, y) = x$
5. $f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f_5(x, y, z) = xy + z$
6. $f_6 : \mathbb{R}_6[X] \to \mathbb{R}_6[X],\ f_6(P) = XP' - P$
7. $f_7 : C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2,\ f_7(g) = (g(0), g'(1))$
8. $f_8 : C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f_8(g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (g(t) - g'(t))dt$

EXERCICE 24

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, -2x + y + z, -6x + 2y + 4z).$$

Notons A la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3).

1. Écrire la matrice A.
2. Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (1, 1, 2)$ et $v_3 = (2, 1, 5)$. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de f dans cette base.

EXERCICE 25

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E. Soit $f : E \longrightarrow E$ l'application linéaire dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. Posons $v_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $v_2 = e_1 + e_3$ et $v_3 = e - 1 + 2e_3$. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de E. Calculer la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3).
3. En déduire que l'on a $f \circ f = -f$.

EXERCICE 26

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'unique application linéaire telle que

$$\begin{cases} f(e_1) & = -e_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_2) & = -2e_1 + 2e_3 \\ f(e_3) & = -4e_1 + e_2 + 4e_3 \end{cases}.$$

Notons A la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3).

1. Écrire la matrice A.
2. Donner une base de $\mathrm{Im} f$ et une équation de $\mathrm{Im} f$.
3. Pour quelles valeurs du nombre réel t l'application $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ est-elle un isomorphisme ?
4. Trouver une base v_1 de $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et une base v_2 de $\mathrm{Ker} f$. Montrer que les vecteurs v_1 et v_2 linéairement indépendants. Trouver $v_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que (v_1, v_2, v_3) soit une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3).

EXERCICE 27

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$$

1. Trouver la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
2. Vérifier que les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 0, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et les vecteurs $u_1 = (1, 1), u_2 = (1, -1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Trouver la matrice de f dans les bases (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ et (u_1, u_2) de $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 28

Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie en posant pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$f(P(X)) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X).$$

1. Montrer que f est linéaire et que son image est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Dans le cas où $n = 3$, donner la matrice de f dans la base $1, X, X^2, X^3$. Déterminer ensuite, pour une valeur de n quelconque, la matrice de f dans la base $1, X, \ldots, X^n$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f. Calculer leur dimension respective.
4. Soit Q un élément de l'image de f. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.